Mécanique – Chapitre 2 : Dynamique du point
Exercices d'entraînement

1 Équilibre d'une masse associée à un ou plusieurs ressorts

1. Un ressort

Un objet ponctuel de masse m est relié à un ressort de constante de raideur k et de longueurs à vide ℓ_0. Le ressort est fixé à l'autre de ses extrémités, le tout faisant un angle α avec l'horizontale. L'objet repose sans frottement sur le support (il est donc en contact avec le support même si le schéma ne le montre pas). Déterminer la position de l'objet à l'équilibre

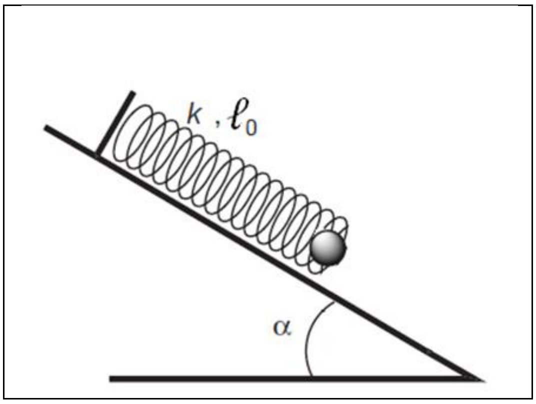


Figure 1 : Système d'étude

2. Deux ressorts

Un objet ponctuel de masse m est relié à deux ressorts de constantes de raideur respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide respectives ℓ_{01} et ℓ_{02}. Les deux ressorts sont fixés sur deux supports éloignés d'une distance L, le tout faisant un angle α avec l'horizontale (l'objet repose sans frottement sur le support). Déterminer la position de l'objet à l'équilibre.

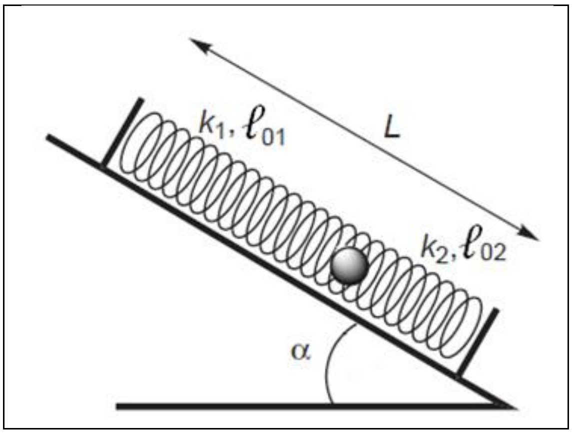


Figure 2 : Système de ressorts

Proposer plusieurs analyses de cas particuliers permettant de penser que le résultat que vous avez trouvé est correct.

2 Etude du comportement d'un ressort

Pour étudier le comportement élastique d'un ressort dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen et déterminer sa constante de raideur k, celui-ci est attaché à un support. On lui accroche une charge dont on fait varier la masse m et on mesure son allongement, $\ell - \ell_0$. Le graphe ci-contre a pu être tracé avec $\ell_0 = 10{,}0$ cm.

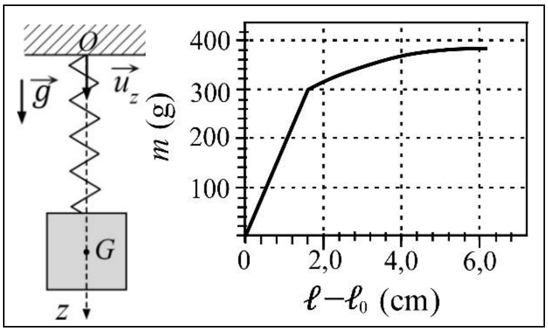


Figure 3 : Système d'étude et graphe obtenu

1. Effectuer un bilan des forces, sur la charge considérée comme système, le régime du ressort étant supposé linéaire.
2. En déduire l'expression de la masse de la charge en fonction de $k, \ell - \ell_0$ et g.
3. Grâce au graphe, déterminer la longueur limite d'utilisation du ressort en régime linéaire (domaine d'élasticité) puis sa constante de raideur.

3 Le jongleur distrait

Un professeur de maths bien connu de tous jongle avec des pommes de masse m. Sa force lui permet de les lancer avec une vitesse v_0. Il est un peu distrait et en lance une verticalement vers le haut.

1. Combien de temps a-t-il pour se sauver, sachant que la hauteur entre ses mains et le sommet de sa tête est h ?
2. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la pomme.

Données : $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $v_0 = 4{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $h = 50\ \mathrm{cm}$

4 Le boulet de canon

Un canon est placé au sommet d'une falaise dont l'altitude par rapport à la mer est notée h. Il se situe à la distance ℓ du bord de la falaise. Il peut propulser un boulet de masse m avec une vitesse initiale v_0, et en faisant un angle α par rapport à l'horizontale. L'accélération de la pesanteur est notée g. Un bateau circule à une distance D du bord de la falaise.

1. Quelle valeur l'artificier doit-il choisir pour l'angle α pour atteindre le bateau lorsque ces deux points sont sur une droite orthogonale à la falaise ?
2. Déterminer la hauteur maximale prise par le boulet de canon.

Données : $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $D = 100\ \mathrm{m}$, $\ell = 100\ \mathrm{m}$, $v_0 = 50\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $h = 100\ \mathrm{m}$

5 Projectile soumis à un frottement fluide

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) est lié au sol terrestre. Oz est vertical ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté $\vec{g} = -g\vec{u_z}$. A $t = 0$, un projectile ponctuel est lancé au point O avec la vitesse $\vec{v_0}$, vecteur situé dans le plan xOz, de module noté $v_0 = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$et faisant un angle $\alpha = 50\ °$ avec l'horizontale (Ox). Ce projectile, de masse $m = 10\ \mathrm{g}$, est soumis à la force de pesanteur et à une force de frottement de type fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ exercée par l'air sur le projectile. La constante de frottement fluide est positive et vaut $\lambda = 0{,}1\ \mathrm{N.s.m^{-1}}$.

1. Exprimer les composantes v_x et v_z de la vitesse du projectile à l'instant t. Montrer que le vecteur vitesse tend vers une vitesse limite qu'on exprimera. Représenter l'évolution de v_x et v_z en fonction du temps. Quel est le temps caractéristique du régime transitoire ainsi identifié.
2. Représenter l'allure de la trajectoire du projectile.
3. Déterminer les coordonnées x et z du projectile à l'instant t.
4. Quelle est l'expression du temps t_M correspondant à l'altitude maximale z_M atteinte, ainsi que l'expression de z_M. Faire les applications numériques.

6 Skieur

Pour tout l'exercice : $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

1. En bas des pistes

Un skieur, de masse $m = 70\ \mathrm{kg}$, chausse ses skis aux pieds du télésiège, sur une piste horizontale. Le contact entre les skis et la neige est modélisable par les lois de Coulomb, avec $\mu_S = 0{,}14$ le coefficient de frottement statique et $\mu = 0{,}05$. Pour avancer jusqu'au télésiège, le skieur pousse sur ses bâtons, cette action mécanique est modélisée par une force de propulsion $\vec{F}$ parallèle au sol.

Déterminer (expression littérale et application numérique) la force minimale que doit fournir le skieur pour avancer.

2. En haut des pistes

Arrivée en haut des pistes il s'arrête pour remettre en place son équipement.

Déterminer l'inclinaison α de la piste par rapport à l'horizontale à partir de laquelle le skieur se mettra à glisser tout seul, face à la pente.

3. C'est parti !

Après plusieurs secondes d'hésitation, il décide de s'élancer sur une piste rouge, d'inclinaison $\alpha = 25\ °$, de longueur $\ell = 100\ \mathrm{m}$. Il pousse vigoureusement sur ses bâtons de manière à avoir une vitesse initiale $v_0 = 2\ \mathrm{m.s^{-1}}$, et dévale la piste « tout schuss ».

On supposera l'inclinaison constante et l'absence de forces de frottement de l'air pendant toute la descente.

Déterminer la vitesse (expression littérale et application numérique) qu'il aura atteinte en bas de la piste.

7 Poulie

Une poulie permet de réaliser le montage de la figure suivante. S_1, de masse m_1 glisse sans frottement sur le plan incliné et S_2, de masse m_2 se déplace verticalement. Déterminer le vecteur accélération de chacun des deux solides, la poulie et le fil étant idéaux.

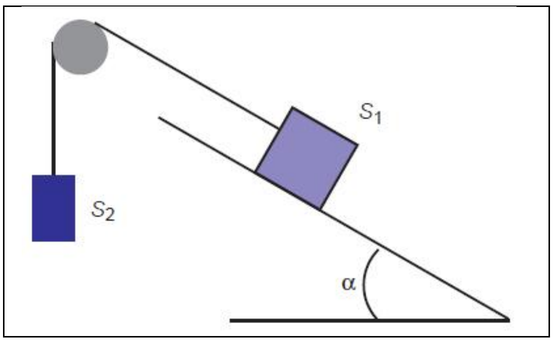


Figure 4

8 Le ressort horizontal

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k est posé sur un support horizontal et peut glisser sans frottement. On note O une extrémité, fixée à un support. A l'autre extrémité M est placé un objet de masse m. Le ressort est comprimé afin que sa longueur soit de $\ell_0/2$ et on lâche l'objet sans vitesse initiale.

1. Déterminer le mouvement de l'objet
2. Tracer sur un même graphe et sur deux périodes du mouvement, l'allongement du ressort, la norme de la forme de rappel élastique, la vitesse et l'accélération de l'objet en fonction du temps.

Données : $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $\ell_0 = 20\ \mathrm{cm}$ et $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$

9 Le ressort lancé

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k est posé sur un plan horizontal et peut glisser sans frottement. On note O une extrémité, fixée à un support. A l'autre extrémité M est placé un objet de masse m. Initialement, la longueur du ressort est ℓ_0 et on lance l'objet avec une vitesse v_0 de manière à comprimer le ressort.

1. Déterminer l'amplitude des oscillations $\ell_{max} - \ell_0$
2. Le ressort devient inélastique et se déforme si sa longueur devient plus petite que $\ell_0/2$. En déduire la vitesse initiale maximale v_0^{max} que l'on peut donner à l'objet.

Données : $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $v_0 = 1{,}0\ \mathrm{cm.s^{-1}}$, $\ell_0 = 20\ \mathrm{cm}$ et $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$

10 Le ressort sur un plan incliné

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k est posée sur un plan incliné faisant un angle α par rapport à l'horizontal et peut glisser sans frottement. On note O l'extrémité supérieure, fixée à un support. A l'autre extrémité M est placé un objet de masse m. Le ressort est comprimé afin que sa longueur soit de $\ell_0/2$ et on lâche l'objet sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement de l'objet. Calculer la période propre des oscillations.

Données : $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $\alpha = \pi/3\ \mathrm{rad}$, $\ell_0 = 20\ \mathrm{cm}$, $m = 10\ \mathrm{g}$ et $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$

11 Densimètre à tube vibrant

De manière simplifié, un densimètre à tube vibrant est constitué d'un corps creux de volume intérieur V_0 et de masse m_0, rempli d'un fluide homogène de masse volumique ρ inconnue à déterminer. L'ensemble corps creux et liquide constitue le système étudié. Ce système S, est suspendu à l'extrémité d'un ressort de coefficient de raideur k et de longueur au repos ℓ_0, lui-même suspendu à une paroi fixe du référentiel du laboratoire, supposé galiléen ; le repère cartésien choisi est $(O, \overrightarrow{u_z})$. Le dispositif est représenté ci-dessous

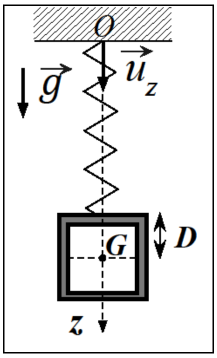


Figure 5

Quand le système accroché au ressort est au repos, la longueur du ressort est alors égale à ℓ_{eq}. La distance entre l'extrémité du ressort au centre d'inertie G du système est constante et notée D et on pose $z(t)$ la position de G.

1. Déterminer l'expression de la position z_{eq} de G quand le système S est à l'équilibre.
2. À $t = 0$, le ressort est écarté de sa position d'équilibre, sans vitesse initiale, soit $z_0 > z_{eq}$ la position initiale du centre d'inertie G. En posant $Z = z - z_{eq}$, déterminer l'équation différentielle satisfaite par la variable Z et en déduire la pulsation propre du mouvement posera ω_0.
3. Résoudre cette équation différentielle satisfaite par la variable $Z(t)$ et en déduire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G en fonction de ω_0, z_{eq} et z_0.
4. Montrer que la masse volumique ρ peut s'écrire : $\rho = \frac{1}{A}({T_0}^2 - B)$; T_0 est la période d'oscillation du système telle que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0+\rho V_0}{k}}$ et A et B, des constantes fonction de V_0, k et m_0.

Lors de l'étalonnage de l'appareil à une température de 288 K, on détermine la période d'oscillation du ressort T_0 dans le cas où le fluide est l'air puis l'eau : on obtient $\rho_{\mathrm{air}} = 1{,}225\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ avec $T_{0,\mathrm{air}} = 708{,}2\ \mathrm{\mu s}$ et $\rho_{\mathrm{eau}} = 999{,}1\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ avec $T_{0,\mathrm{eau}} = 975{,}6\ \mathrm{\mu s}$.

5. Déterminer les expressions et les valeurs des constantes A et B.
6. Pour un liquide inconnu, on obtient $T_0 = 926{,}0\ \mathrm{\mu s}$; quelle est sa masse volumique ?

12 Plateau vibrant

Un objet de masse m est posé sur un plateau de cote z_p. Le plateau est animé d'un mouvement vibratoire vertical tel que : $z_p = z_0 \cos(\omega t)$

A quelle condition sur z_0 et ω l'objet reste-t-il lié au plateau ? Calculer $z_0^{\max}$ pour une fréquence de vibration du plateau de $f_0 = 50$ Hz ($g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$).

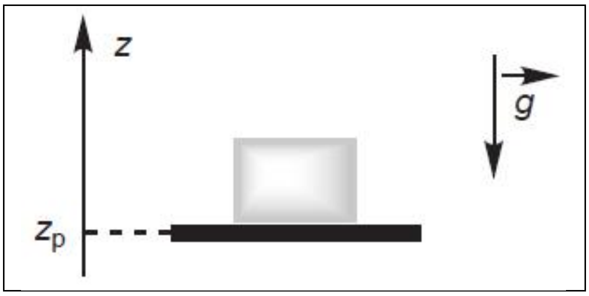


Figure 6

13 Oscillateurs couplés

Trois ressorts identiques (k, ℓ_0) sont attachés à deux objets identiques de masse m, qui glissent sans frottements sur le sol horizontal. Les deux extrémités A et B sont séparées par la distance $3\ell_0$. Le premier objet est repéré par l'allongement ℓ_1 par rapport à sa position d'équilibre, et le deuxième par l'allongement ℓ_2 par rapport à sa position d'équilibre.

A $t = 0$, on lâche sans vitesse initiale les deux objests. Dans le premier cas, $\ell_1(0) = \ell_2(0) = L > 0$. Dans le deuxième cas $\ell_1(0) = -\ell_2(0) = L$.

1. Etablir les équations différentielles vérifiées par $\ell_1(t)$ et $\ell_2(t)$
2. Résoudre le système dans les deux cas et en effectuant le changement de variables $X(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)$ et $Y(t) = \ell_1(t) - \ell_2(t)$. On notera $\omega_P = \sqrt{k/m}$ (p pour phase) et $\omega_o = \sqrt{3k/m}$ (o pour opposition de phase). Justifier les termes de phase et d'opposition de phase.
3. On choisir $L = 0{,}3\ell_0$. Sur le même graphe, superposer l'évolution de $x_1(t) = \ell_0 + \ell_1(t)$ et $x_2(t) = 2\ell_0 + \ell_2(t)$ sur deux périodes temporelles pour le premier cas. Superposer de plus l'évolution de $x_1(t) = \ell_0 + \ell_1(t)$ et $x_2(t) = 2\ell_0 + \ell_2(t)$ dans le deuxième cas. Commenter brièvement..

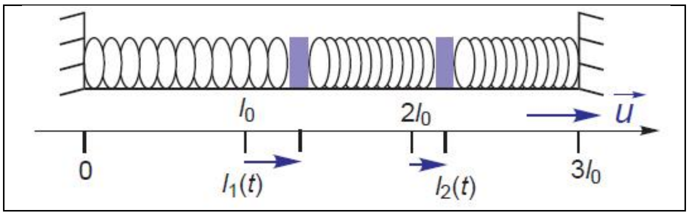


Figure 7

14 Charges en équilibre

Deux boules métalliques chacune de masse $m = 15$ g, assimilées à des points matériels, sont électrisées et portent des charges opposées q et $-q$ $(q > 0)$. Elles sont suspendues à des fils de même longueur, et on mesure alors la distance $d = 15$ cm. L'angle des fils par rapport à la verticale est de $\alpha = 10°$.

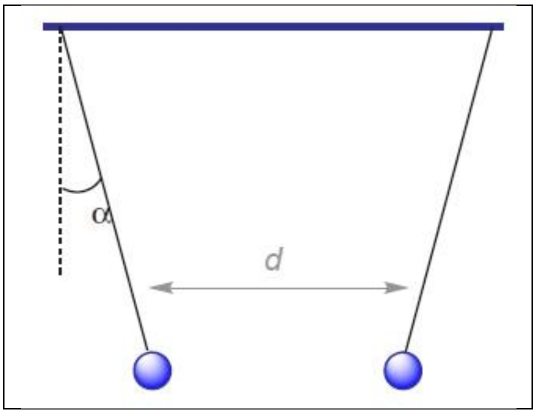
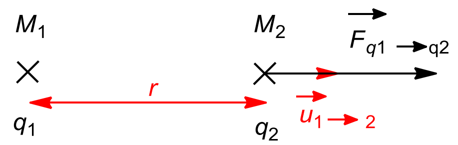


Figure 8 : Système étudié

On donne l'expression de la force électrostatique qu'une charge q_1 exerce sur une charge q_2 :



$$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1\to 2}$$

ε_0 : permittivité du vide, $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$

q_1 et q_2 étant les valeurs de charges algébriques.

Figure 9 : Force électrostatique de Coulomb

1. Calculer la charge q ($\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$)
2. Calculer la tension $\|\vec{T}\|$ d'un des deux fils.

15 Spectromètre à temps de vol TOF/LDMS

On considère un spectromètre à temps de vol dans lequel des cations sont générés par un échantillon placé au point origine O, sous l'effet d'une impulsion laser. Ces ions sont accélérés dans une zone où règne par un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$ avec $E = 5\,000\ \mathrm{V.m^{-1}}$ puis passent dans une zone dite de vol libre où ne règne aucun champ électrique. Ils viennent alors frapper un détecteur qui enregistre le temps écoulé entre l'impulsion laser et la détection.

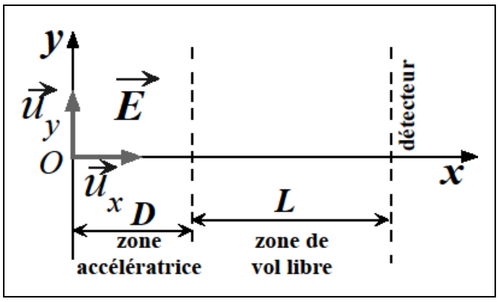


Figure 10

On étudie le mouvement des ions dans la première zone ; l'ion considéré de masse m, de charge q est initialement au repos à l'abscisse $x = 0$, frontière de la zone accélératrice. On exprimera les résultats en fonction des paramètres pris parmi q, m, D, E et t.

On donne l'expression de la force électrique $\vec{F}$ subie par une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$: $\vec{F} = q\vec{E}$

1. Montrer en considérant le cas d'un proton de masse $m_p = 1{,}67.10^{-27}\mathrm{kg}$ et de charge $q_p = 1{,}60.10^{-19}\mathrm{C}$ que le poids est une force négligeable par rapport à la force électrique.

   Le poids sera négligé dans toute la suite de l'exercice.
2. Exprimer les équations horaires des coordonnées d'un cation quelconque dans la 1ère zone. À quel temps t_1, l'ion arrive-t-il dans le plan d'équation $x = D$? Exprimer la vitesse v_1 de cet ion à cette date.
3. Quelle est la nature du mouvement de l'ion dans la zone accélératrice et dans la zone libre ? En déduire le temps de vol t_v de l'ion, de la cible O au détecteur, ce dernier étant placé à la distance L de sortie de la zone accélératrice pour le cation de masse m.
4. Montrer que le rapport masse sur charge de l'ion de masse m s'exprime en fonction du temps de vol et des constantes E, D et L par la relation ci-dessous :

$$\frac{m}{q} = \frac{E{t_v}^2}{\left(\sqrt{2D} + \frac{L}{\sqrt{2D}}\right)^2}$$

Faire l'application numérique du temps de vol pour les valeurs suivantes :

$$D = 1{,}0\ \mathrm{m}\ ;\ L = 2{,}0\ \mathrm{m}\ ;\ \frac{m}{q} = 1{,}0.10^4\ \mathrm{kg.C^{-1}}$$

16 Mouvement dans un champ électrique

On étudie le mouvement d'une particule de masse m et de charge $q < 0$. La particule initialement en O est soumise au champ électrique uniforme $\vec{E}$ représenté sur le schéma ci-dessous, de norme noté E. La particule part de O avec une vitesse initiale de norme v_0 dirigée selon la direction et le sens de l'axe Ox.

On donne l'expression de la force électrique $\vec{F}$ subie par une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$: $\vec{F} = q\vec{E}$

Déterminer l'ordonnée du point d'impact de la charge sur un écran perpendiculaire à l'axe Ox représenté ci-dessous et représenter qualitativement la trajectoire de la charge.

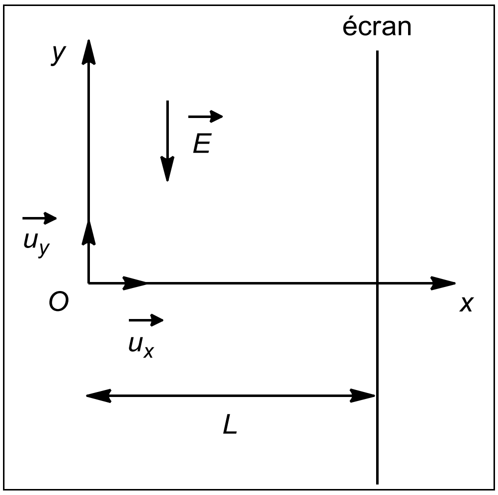


Figure 11