Mécanique – Chapitre 3 : Statique des fluides

Exercices d'application

1 Force pressante due à la pression atmosphérique

On tient la paume de la main vers le ciel. Sa surface est assimilée à un cercle de diamètre $D = 10$ cm.

1. Donner une estimation de la masse m d'un objet dont le poids est égal à la force pressante exercée par l'atmosphère sur la paume de la main.
2. Même question pour une surface de 1 m^2 (retenez cet ordre de grandeur).
3. Pourquoi notre main ne tombe-t-elle pas par terre sous l'action de cette force ?
4. Dans un film de science fiction, comment doit-on mettre en scène la mort d'un astronaute dont la combinaison spatiale fuit rapidement ?

2 L'expérience de crève tonneau de Pascal

1. Pascal élabora l'expérience suivante afin de montrer que l'on pouvait crever un tonneau plein grâce à une faible masse d'eau. Au dessus d'un tonneau rempli à ras bord, il ajoute un tube fin dont l'aire de la section est $S = 1\ \text{cm}^2$ (figure 1). Il verse dans le tube de l'eau. Lorsque la pression en haut du tonneau dépasse 2 atm, les forces pressantes qui s'exercent sur les parois du tonneau le font commencer à fuir puis se crève. Calculer la masse d'eau minimale m_{min} à ajouter pour crever le tonneau.

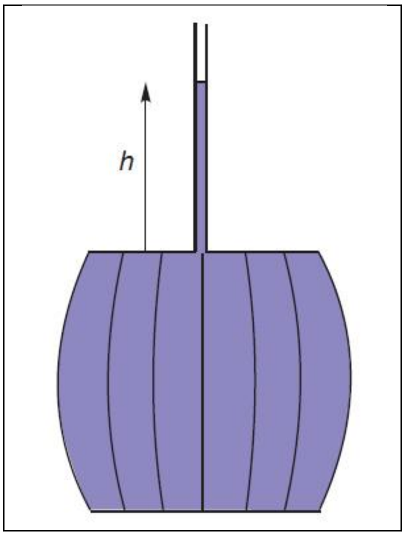


Figure 1 : tonneau de Pascal

Quelle force a été négligée lors du raisonnement ?

3 Tube en U contenant deux liquides non miscibles

Un tube en U est rempli d'eau, de masse volumique ρ_e. Dans une des parties verticales, on introduit sur une hauteur h du cyclohexane, solvant organique non miscible à l'eau, et de masse volumique $\rho_0 < \rho_e$. Calculer la différence d'altitude $z_A - z_B$ entre les deux surfaces libres, (voir figure 2). Proposer un moyen de vérifier la cohérence du résultat.

Données : $\rho_e = 1{,}00\ \text{g.cm}^{-3}$, $\rho_0 = 0{,}779\ \text{g.cm}^{-3}$ et $h = 5{,}00$ cm.

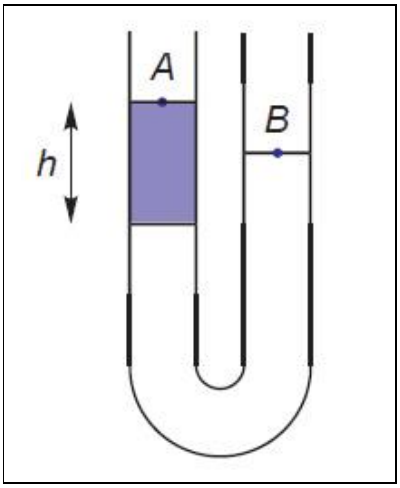


Figure 2 : Tube en U contenant deux liquides non miscibles

3 Convection

On cherche à déterminer quel phénomène prédomine entre la convection thermique et la diffusion thermique dans le manteau terrestre.

Pour cela on comparera les temps caractéristique de ces phénomènes permettant d'estimer la durée de leur mise en place. Ces temps dépendent de la hauteur caractéristique du phénomène, ici la hauteur du manteau L.

On donne l'expression du temps caractéristique de la mise en place de la convection :

$$\tau_{\text{convection}} = \sqrt{\frac{L}{\alpha \Delta T g}}$$

Avec :

L, l'épaisseur du manteau $L = 2\,900$ km,
α le coefficient de dilatation thermique du manteau $\alpha = 2{,}0.10^{-5}\ \text{K}^{-1}$,
ΔT différence de température entre le haut et le bas du manteau, on prendra une valeur moyenne $\Delta T = 3\,000\ °\text{C}$,
l'accélération de pesanteur $g = 9{,}8\ \text{m}.s^{-2}$,

1. Sachant que la durée de mise en place de la conduction dépend de la diffusivité du matériau, κ en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression du temps caractéristique.
2. Déterminer qui de la conduction et de la convection prédomine dans le manteau terrestre.

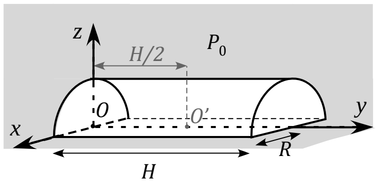
Donnée : diffusivité thermique du manteau $\kappa = 7{,}5.10^{-7}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$

4 Direction de résultantes de forces de pression

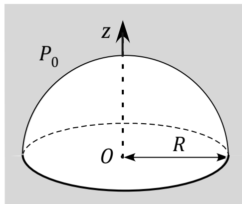
Pour les deux situations proposées ci-dessous et en utilisant la symétrie des surfaces considérée, déterminer la direction de la force pressante résultante exercée par le milieu de pression P_0 supposée constante sur la surface S dans les deux cas suivants.

1. **Cas 1 :** S surface du demi-cylindre de rayon R et de hauteur H
2. **Cas 2 :** S surface du demi-sphère de rayon R.

Cas 1 :



Cas 2 :



Exercices d'entraînement

5 La feuille de papier en équilibre

Un récipient cylindrique de section S et de hauteur $h = 10\ \text{cm}$ est entièrement rempli d'eau de masse volumique ρ. On pose dessus une feuille de papier rigide couvrant complètement la surface libre du récipient, et on retourne l'ensemble.

1. Que se passe-t-il et pourquoi ?
2. Quelle devrait être la hauteur minimale pour que la feuille de papier rigide finisse par tomber ? Commenter le résultat.

6 Le verre retourné

On utilise un verre de forme cylindrique, de masse à vide m, de hauteur intérieure h, de section intérieure S. On remplit complètement ce verre avec de l'eau, puis on ferme la surface libre avec une feuille de papier et on retourne ce verre sur une cuve à eau, en l'enfonçant suivant une hauteur h'. On retire la feuille de papier. Quelle est la force appliquée par l'opérateur sur le verre pour le maintenir en équilibre ?

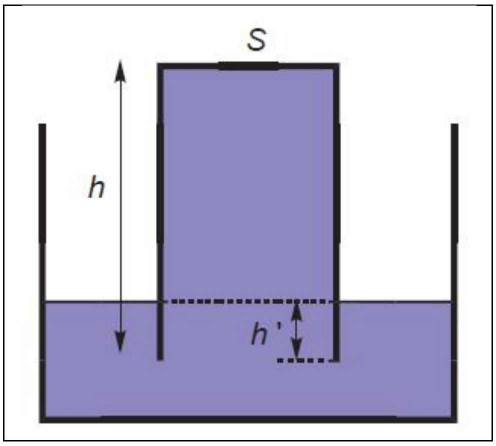


Figure 3 : Verre retourné

7 Le grand aquarium abyssal de la Cité de la Mer

La vitre verticale de forme rectangulaire du grand aquarium de la Cité de la Mer possèdent les caractéristiques impressionnantes suivantes : hauteur $h = 7{,}70\ \text{m}$, largeur $L = 4{,}50\ \text{m}$ et épaisseur $d = 0{,}33\ \text{m}$. Elle est constituée d'un verre synthétique en méthacrylate, transparent et incolore. La pression de l'air est égale à celle au niveau de la mer P_0. L'eau de mer dont est rempli l'aquarium est un fluide incompressible que l'on assimilera à de l'eau douce de masse volumique ρ. Le but est la détermination de la force pressante s'exerçant sur la vitre. On précise que $H = 7{,}80\ \text{m}$.

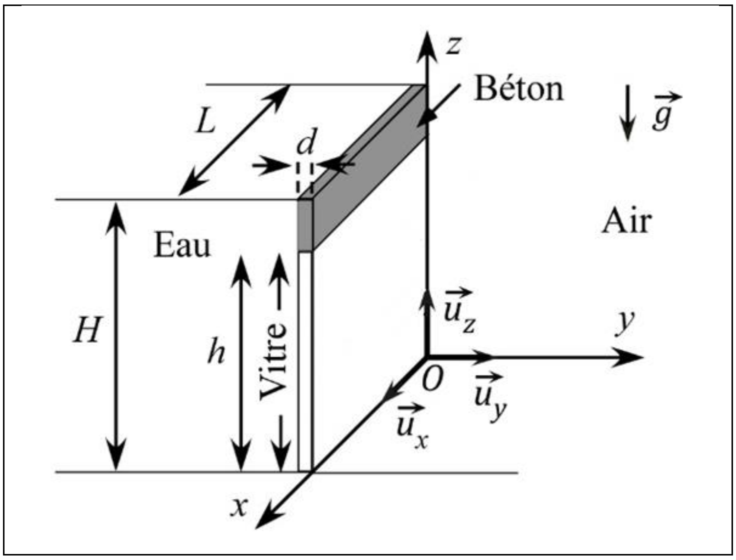


Figure 4 : Schéma de la situation

Proposer un découpage de la surface de la vitre permettant de calculer la force pressante résultante de l'air et de l'eau. Faire le calcul : expression littérale du vecteur force pressante résultante sur toute la vitre et application numérique de la norme.

8 Pression sur une surface non plane

Un récipient (figure 5) constitué d'un demi-cylindre de rayon R et de hauteur h est rempli d'un liquide. Déterminer la direction de la force pressante résultante du liquide sur la surface cylindrique.

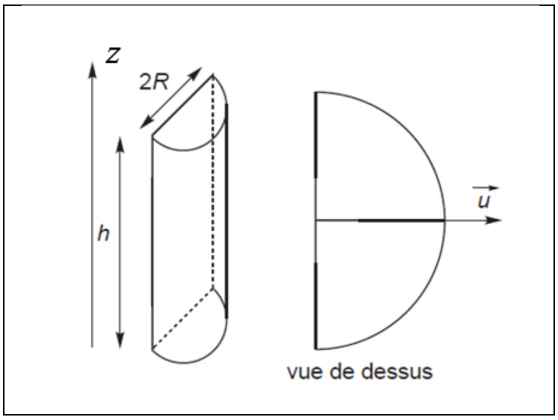


Figure 5 : Récipient étudié rempli d'un liquide

9 Mesure de la masse volumique d'un liquide

Un tube en U est rempli de mercure, de masse volumique ρ_2. Dans une des parties verticales, on introduit sur une hauteur h_1 de l'eau (non miscible au mercure), et de masse volumique $\rho_1 < \rho_2$. Dans l'autre partie verticale, on introduit de l'éthanol (tout aussi peu miscible au mercure) sur une hauteur $h_3 - h_2$. On mesure expérimentalement les hauteurs h_1, h_2 et h_3 (voir figure 3). Calculer la masse volumique ρ_3 de l'éthanol en fonction des données de l'énoncé.

Données : $\rho_1 = 1{,}00\ \mathrm{g.cm^{-3}}$, $\rho_2 = 13{,}60\ \mathrm{g.cm^{-3}}$, $h_1 = 80{,}0\ \mathrm{cm}$, $h_2 = 5{,}00\ \mathrm{cm}$, et $h_3 = 20{,}0\ \mathrm{cm}$

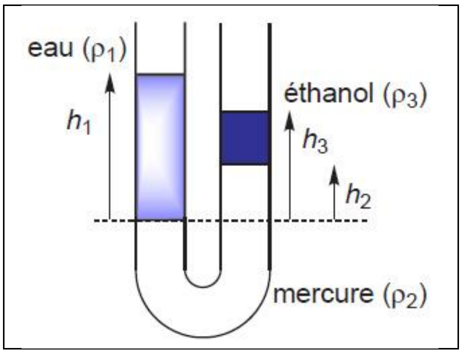


Figure 6 : Tube en U contenant trois liquides non miscibles

10 Application en géologie

Dans le cadre de l'isostasie, on admet que la pression au sein des roches ductiles suit la loi fondamentale de la statique des fluides incompressibles. On présente ci-après un modèle de manteau avec une croûte amincie, normale et épaissie. Grâce à l'équilibre isostatique, la croûte épaissie a un relief h et une racine R. La croûte amincie présente un déficit de relief h_e, généralement comblé par une mer et une antiracine R'. On note ρ_1 la masse volumique de la croûte et ρ_2 la masse volumique du manteau lithosphérique. La pression atmosphérique est prise uniforme.

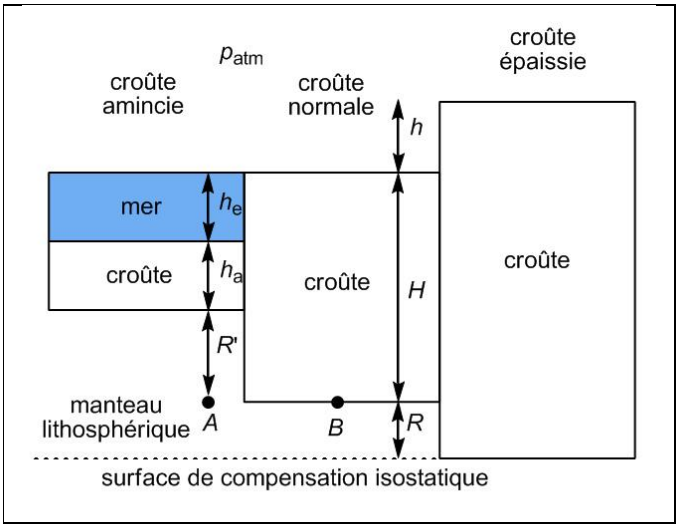


Figure 7 : modélisation géologique

Pour les valeurs numériques, on a $\rho_1 = 2{,}8\ \mathrm{g.mL^{-1}}$, $\rho_2 = 3{,}3\ \mathrm{g.mL^{-1}}$, épaisseur de la croûte normale $H = 30\ \mathrm{km}$.

1. Croûte épaissie

1.1. En comparant croûte normale et croûte épaissie, déterminer la relation entre la racine R et l'altitude h d'une croûte épaissie. Donner le résultat littéral, puis sous la forme $R = ah$ où a est une constante dont on calculera la valeur numérique.

1.2. Dans l'Altiplano des Andes, on estime que la croûte continentale est d'épaisseur double de la croûte normale. En déduire l'altitude de l'Altiplano en fonction de H, ρ_1 et ρ_2. Faire l'application numérique.

1.3. Dans l'hypothèse d'une diminution d'altitude h_0 liée à l'érosion ou à un processus tectonique, quelle est la hauteur e_0 de la tranche effective des roches enlevées ? Donner le résultat littéral en fonction de h_0, ρ_1 et ρ_2 et faire l'application numérique dans le cas $h_0 = 100\ \mathrm{m}$. commenter brièvement le résultat obtenu.

La chaîne hercynienne était en Europe il y a 250 millions d'années, une chaîne vigoureuse comparable à l'Himalaya ($h = 8\,000\ \mathrm{m}$). On se préoccupe dans les questions suivantes de roches affleurant aujourd'hui en Bretagne ou dans le Massif Central ($h_1 = 1\,000\ \mathrm{m}$).

1.4. Quelle est la valeur numérique de la profondeur e_1 de roche qui a été enlevée ?

1.5. A quelle pression p_1 étaient ces roches il y a 250 millions d'années ? Faire l'application numérique.

1.6. Pour un géotherme normal de $30\ \mathrm{°C.km^{-1}}$, estimer la valeur numérique de la température de ces roches ? En déduire la nature de ces roches.

2. Croûte amincie

2.1. Déterminer la relation entre l'antiracine R' et l'épaisseur d'eau h_e en fonction des masses volumiques. On note ρ_e la masse volumique de l'eau.

2.2. Déterminer la relation entre la profondeur d'eau h_e et l'épaisseur de la croûte amincie h_a en fonction des masses volumiques et de H

2.3. Au cours d'un processus tectonique distensif, il a été créé un bassin de $h_e = 1\,000\ \mathrm{m}$ de profondeur. Au rythme d'une sédimentation constante (sédiments de masse volumique ρ_1) et continue de vitesse $v = 0{,}50$ mm par an, combien d'années seraient nécessaires pour combler ce bassin ?

11 Forage d'un puits

On considère un lieu en bord de mer représenté sur le schéma ci-dessous. Il s'agit d'y réaliser un forage afin de pomper l'eau douce présente dans la roche saturée en eau (nappe phréatique) sans atteindre la limite eau douce-eau salée. Dans un premier temps, on installe un piézomètre (voir figure ci-dessous), tube ouvert aux deux extrémités, atteignant la nappe phréatique ; l'eau de la nappe pénètre ainsi dans le tube. Le niveau de l'eau dans le piézomètre par rapport au niveau de l'eau de mer définit le niveau piézométrique h.

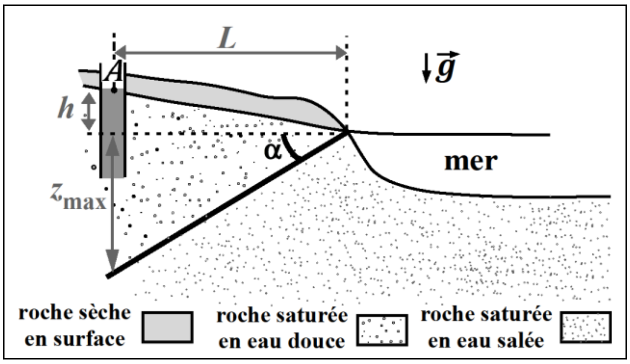


Figure 8

De plus, lorsque les roches sont saturées en eau, on suppose qu'il est possible d'appliquer la loi fondamentale de la statique des fluides à l'eau présente dans ces roches.
On suppose que l'eau douce et l'eau de mer ne se mélangent pas au niveau de la limite de séparation eau douce-eau de mer ; l'eau présente dans les roches saturées est considérée comme un fluide au repos, homogène et incompressible de masses volumiques pour l'eau douce ρ_1 et pour l'eau de mer $\rho_2 = 1{,}025.10^3 \mathrm{kg.m}^3$.

1. Déterminer l'expression de la profondeur de la limite entre l'eau douce et l'eau salée $z_{\max}$ en fonction de ρ_1, ρ_2, g *et* h. Faire l'application numérique pour $h = 3{,}00$ m.
2. Donner l'expression littérale de l'angle α de la limite entre l'eau-douce et l'eau de mer. Faire l'application numérique pour $L = 300$ m.

12 Manomètre différentiel

On considère le manomètre différentiel à deux liquides (plus précis que le manomètre classique) représenté ci-dessous. L'ensemble contient deux liquides indicés 1 et 2 de masses volumiques respectivement ρ_1 *et* ρ_2. Initialement, le manomètre est relié à la bouteille où règne la pression P_0. On lit ainsi la dénivellation x_0 dans le tube pour le liquide 1.

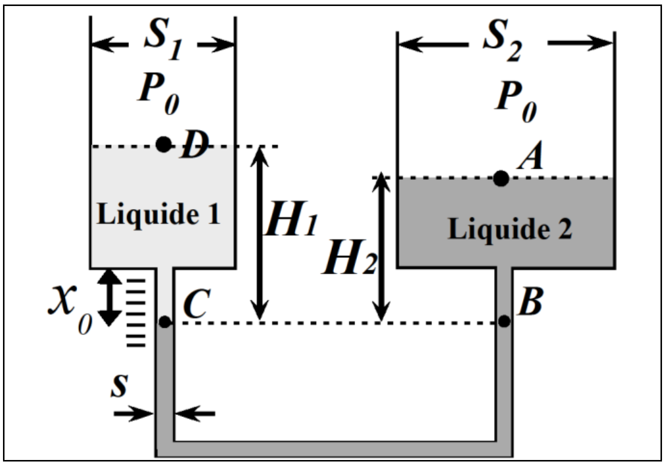


Figure 9

1. Exprimer la relation entre ρ_1, ρ_2, H_1 et H_2.

Le compartiment 1 du manomètre est ensuite relié à une enceinte contenant un gaz à la pression P, on lit ainsi une nouvelle dénivellation x dans le tube pour le liquide 1.

2. Exprimer la différence de pression $P - P_0$ en fonction de $\rho_1, \rho_2, H_1, H_2, x - x_0, s, S_1$ et S_2. En déduire l'expression de la sensibilité s_e du manomètre défini par : $s_e = \frac{P-P_0}{x-x_0}$; faire les applications numériques.

Aide : on montrera que :

- la hauteur de liquide dans le compartiment du liquide 1 de surface S_1 baisse d'une hauteur égale à h_1 telle que :

$$h_1 = \frac{s\,(x - x_0)}{S_1}$$

- On fera un raisonnement analogue pour le liquide 2 dans le compartiment 2 de surface S_2 en faisant intervenir une hauteur h_2
- On fera un schéma expliquant la nouvelle situation en ne tenant pas compte de l'échelle.

Données : $x - x_0 = 5{,}0$ mm, $S_1 = S_2 = 100 \times s$, $\rho_1 = 1\,000 \mathrm{~kg.m^{-3}}, \rho_2 = 1\,025 \mathrm{~kg.m^{-3}}$

13 Modèles d'atmosphère

1. Atmosphère isotherme

L'atmosphère assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$ est dans un premier temps considérée comme isotherme à la température T_0

1.1. Calculer l'expression de la pression p à l'altitude z en fonction notamment de la pression atmosphérique p_{atm} qui règne à l'altitude $z = 0$.

1.2. **Application numérique :** calculer la pression p_1 à l'altitude de $z_1 = 10\ \mathrm{km}$. **Données :** $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $T_0 = 293\ \mathrm{K}$

2. Atmosphère de température variable

En deuxième approximation, la température de l'atmosphère est considérée comme variant linéairement avec l'altitude : $T = T_0(1 - kz)$ avec $k = 2{,}0.10^{-2}\ \mathrm{km^{-1}}$.

2.1. En déduire l'expression de la pression p' à l'altitude z en fonction notamment de la pression atmosphérique p_{atm} qui règne à l'altitude $z = 0$.

2.2. ***Application numérique*** **:** calculer la pression $p_1{}'$ à l'altitude de $z_1 = 10\ \mathrm{km}$ ainsi que la température T_1 à cette altitude

2.3. Calculer l'écart relatif e entre p_1 et $p_1{}'$.

14 Montée des océans

1. Un glaçon flotte dans un verre d'eau. Quel est le pourcentage de glace immergée ?
2. En déduire de quel niveau montera l'eau lorsque le glaçon aura fondu.
3. A quoi attribuer la montée du niveau des océans en raison du réchauffement climatique ?

Données : masse volumique de l'eau $\rho_e = 1{,}0\ \mathrm{g.cm^{-3}}$ et masse volumique de la glace $\rho_g = 0{,}92\ \mathrm{g.cm^{-3}}$.

15 Etude d'un ballon sonde

Le ballon-sonde est le moyen le plus simple et le plus économique d'envoyer un chargement dans les différentes couches de l'atmosphère. Les ballons météorologiques, embarquant du matériel scientifique de mesure, explorent par exemple toute la troposphère et la basse stratosphère. On se propose ici d'étudier un ballon-sonde stratosphérique ouvert à l'hélium (He). Dans toute cette partie, l'atmosphère est supposée isotherme, de température $T_0 = 293\ \mathrm{K}$. La pression au niveau du sol est égale à P_0, pression au niveau de la mer. On négligera la force de frottement de l'air. Le mouvement du ballon-sonde est suffisamment lent pour pouvoir appliquer au fluide la loi de la statique des fluides.

Donnée : $M(\mathrm{He}) = 4{,}0\ \mathrm{g.mol^{-1}}$., $M(\mathrm{air}) = 29{,}0\ \mathrm{g.mol^{-1}}$

Dans ce type de ballon-sonde, le ballon est indéformable et garde un volume constant $V_1 = 100\ \mathrm{m^3}$. Le ballon étant ouvert à sa base, la pression à l'intérieur du ballon est identique à tout moment à celle qui règne à l'extérieur. Au moment du lancement, le ballon est gonflé à l'hélium. On suppose que la température à l'intérieur du ballon reste constante, égale à la température extérieure $T_0 = 293\ \mathrm{K}$. Au ballon est attachée une nacelle contenant les appareils de mesure et un parachute, de masse $m_2 = 10{,}0\ \mathrm{kg}$. L'axe vertical (Oz) est choisi ascendant.

1. Exprimer en fonction des données, la masse d'hélium, m_1 dans le ballon ainsi que la masse volumique de l'air, $\rho_{\mathrm{air},0}$ au moment du décollage.

Pour la suite, on considère le système {ballon + nacelle}.

2. Exprimer le poids du système et la poussée d'Archimède qui s'applique sur le ballon gonflé à l'hélium au moment du décollage (on négligera la poussée d'Archimède s'exerçant sur la nacelle).
3. Analyser la flottabilité du ballon équipé de sa nacelle et montrer qu'il peut effectivement décoller.
4. Exprimer la pression de l'air $P_{\mathrm{air}}(z)$ et la masse volumique de l'air $\rho_{\mathrm{air}}(z)$en fonction de l'altitude z.
5. Exprimer la norme de la poussée d'Archimède en fonction de l'altitude. Comment évolue cette norme au fur et à mesure que le ballon monte ?
6. Exprimer la quantité de matière d'hélium dans le ballon en fonction de l'altitude ? Conclure.
7. Le ballon-sonde atteint son altitude maximale $z_{\max}$ et conserve cette altitude ensuite. Montrer que $z_{\max}$ satisfait à l'expression proposée. Faire l'application numérique.

$$z_{\max} = -\frac{RT_0}{Mg}\ln\left(\frac{RT_0 m_2}{P_0 V_1\big(M(\mathrm{air}) - M(He)\big)}\right)$$