Ondes et signaux (et thermodynamique) – Chapitre 4 : Régimes transitoires du premier ordre

Extrait du programme de BCPST 1

Notions	Capacités exigibles
Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension électriques, entre intensité du courant électrique et tension électrique; capacité d'un condensateur. Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur. Énergie stockée dans un condensateur. Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension. Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique. Stockage et dissipation d'énergie.	Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur plan. Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques. Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série.
Thermodynamique : Modélisation de l'évolution de la température d'un système incompressible et indilatable au contact d'un thermostat.	Effectuer un bilan d'énergie pour un système incompressible et indilatable en contact avec un thermostat : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température du système.

Ce qu'il faut retenir de ce chapitre

Savoirs	Savoir-faire
Caractéristiques d'un condensateur (relier la tension, la charge et l'intensité). Continuité de la tension aux bornes du condensateur. Comportement d'un condensateur en régime permanent. Notion de constante de temps, définition de la constante de temps dans le cadre d'un circuit RC. Énergie emmagasinée par un condensateur.	Déterminer des conditions initiales. Savoir analyser le comportement d'un condensateur en régime stationnaire. Déterminer l'équation différentielle caractéristique d'un circuit RC Résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre. Tracer des graphes de type exponentiel. Déterminer la constante de temps par analyse graphique. Effectuer un bilan énergétique au cours d'un régime transitoire. Déterminer l'équation différentielle dans le cadre d'un régime transitoire en transfert thermique.

Ordres de grandeur à connaître

Les condensateurs usuellement utilisés possèdent de faible capacité pouvant aller du nF au µF (10^{-9} à 10^{-6}). Donc un condensateur ayant une capacité de l'ordre de grandeur du Farad est un condensateur à très forte capacité.

Extraits de rapports de jury du concours AGRO-VETO

La convention d'orientation des condensateurs a parfois été la cause d'erreurs de signes, surtout lorsque le candidat fait intervenir sans nécessité la charge d'une armature.

Attention à ne pas utiliser trop vite la relation $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, dans un énoncé u et i ne sont pas forcément respectivement la tension aux bornes du condensateur et l'intensité qui le traverse, il faut donc bien faire attention aux notations de l'énoncé (ou aux notations que l'on a introduit au cours du raisonnement).

Il est impératif de faire attention à l'homogénéité des formules : l'équation différentielle doit faire apparaître une constante de temps homogène à une résistance fois une capacité.

Site internet intéressant :

Application pour comprendre le fonctionnement d'un condensateur) :

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/chargeRC_TS.php

Introduction : Lorsqu'un système est soumis à un phénomène de transport (de charges, d'énergie). Le flux caractérisant ce transport (intensité électrique pour le transport de charge, flux thermique pour le transport d'énergie thermique) peut être constant, on parle dans ce cas de régime stationnaire (*cf.* chap.1 sur les signaux, et chap.4 en thermodynamique). Mais il peut aussi être fonction du temps : il existe plusieurs types de régimes variables, nous étudierons les régimes dits transitoires du 1er ordre, leur nom est en lien avec le type d'équations différentielles qui régissent ces régimes. Nous étudierons en guise d'exemple les régimes transitoires du premier ordre en électrocinétique. L'analyse effectuée permettra ensuite de faire l'analogie dans le cadre des transferts thermiques.

I. Analyse expérimentale d'un régime transitoire en électrocinétique : comportement d'un condensateur

1. Présentation du dipôle condensateur

a. Définition

Description

Un condensateur est un dipôle capable de stocker de l'énergie, sous la forme d'un champ électrostatique. Il s'agit d'un composant passif, qui dans la plus simple de ses formes est constitué de deux surfaces conductrices que l'on appelle armatures, mises face à face et séparées par un isolant appelé aussi diélectrique.

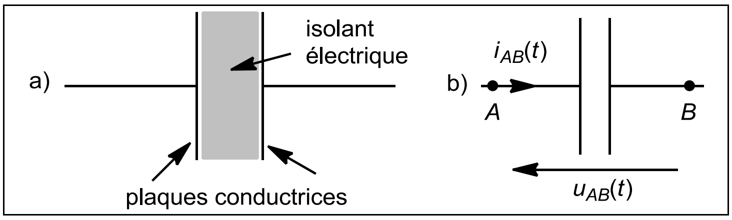


Figure 1 : a) Représentation schématique d'un condensateur et b) symbole

Propriété :

Sa propriété principale est de pouvoir **stocker des charges électriques** opposées sur ses armatures.

En effet l'isolant empêche le passage des électrons, mais les armatures sont suffisamment proche pour qu'un champ électrostatique (permettant le passage du courant de l'autre côté) se mette en place accompagné d'une accumulation de charge négative sur l'une des armatures (excès d'électrons) et positives sur l'autre (défaut d'électrons).

Exemple :

On notera q_A la charge (en Coulomb) accumulée sur l'armature reliée à la borne A et q_B celle sur l'armature reliée à la borne B.

Définition : capacité d'un condensateur

Soit q_A la charge (en coulomb) accumulée sur l'armature reliée à la borne A.

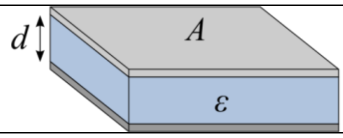
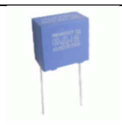
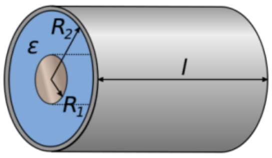
Cette charge est proportionnelle à la différence de potentiel entre l'armature A et l'armature B. Le coefficient de proportionnalité est appelé **capacité** du condensateur, exprimée en farads (F), soit des A.s.V^{-1} :

Il faut faire attention à l'orientation de la tension par rapport à la charge considérée.
En effet $q_A = C \times u_{AB}$ mais $q_B = -\, C \times u_{AB}$

b. Types de condensateurs et utilisation pratique

La capacité d'un condensateur dépend de ses caractéristiques géométriques et du type de matériau isolant utilisé (l'isolant est caractérisé par sa permittivité diélectrique ε). Les valeurs courantes des capacités utilisées sont de l'ordre du **microfarad**. En général plus le condensateur est gros plus sa capacité est importante.

Voici différents types de condensateurs :

Condensateur plan		
Condensateur cylindrique		

Les condensateurs sont utilisés dans toutes sortes de circuit électrique pour de nombreuses utilisations. En voici quelques unes :

- **Pour stocker de l'énergie et la libérer le moment voulu :**
  - **Supercondensateurs utilisées dans les transports :** récupération de l'énergie du freinage dans les véhicules électriques ou hybrides
  - **Flash d'appareil photo :** on stocke de l'énergie dans un condensateur qui se décharge lors du déclenchement
- **Pour délivrer des impulsions électriques : Pacemaker**
- **En tant que capteurs :**
  - **Microphone électrostatique :** la membrane du microphone est l'une des armatures d'un condensateur, la vibration rapproche et éloigne les armatures, faisant varier la capacité, ce qui produit une variation de tension.
  - **Écran tactile :** un conducteur relié à un circuit électrique est placé derrière l'écran lui-même isolant, quand on place le doigt l'ensemble constitue un condensateur qui s'ajoute en parallèle au circuit.
- **Pour filtrer des signaux périodiques**

c. Lien entre l'intensité qui traverse le condensateur et la tension à ses bornes

Par définition de l'intensité électrique comme flux de charge, on a :

Avec δq_A la charge élémentaire qui s'est accumulée sur l'armature A pendant $\mathrm{d}t$.

Exercice d'application 1

En convention générateur, on a : $i_{BA} = -C \times \frac{\mathrm{d}U_{AB}}{\mathrm{d}t}$

2. Réponse à un échelon de tension : régime transitoire

a. Charge d'un condensateur

Circuit étudié :

avec $R = 10\ \text{k}\Omega$, $C = 2{,}0\ \mu\text{F}$ et $e = 5{,}0\ \text{V}$

Le condensateur est initialement déchargé, à $t = 0$ on ferme l'interrupteur en position (1).

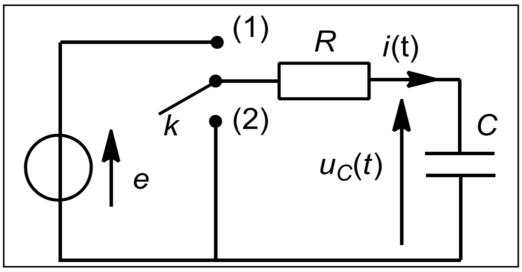


Figure 2 : circuit étudié

Graphes obtenus pour $i(t)$ et $u_C(t)$:

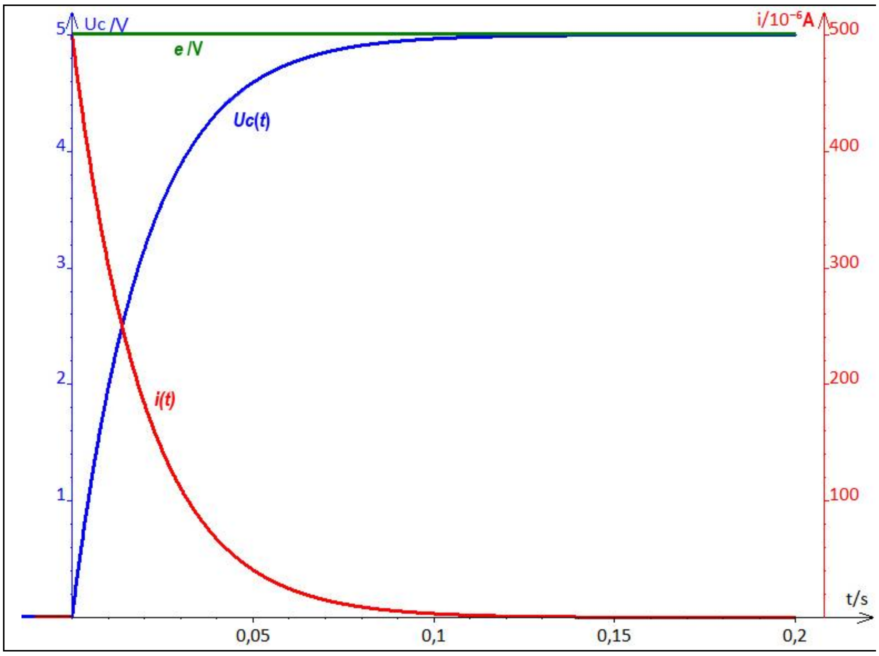
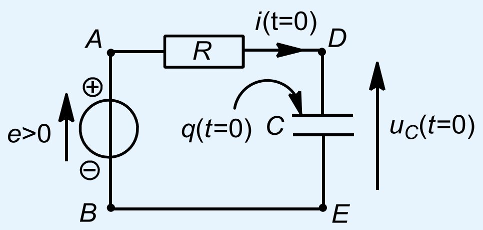


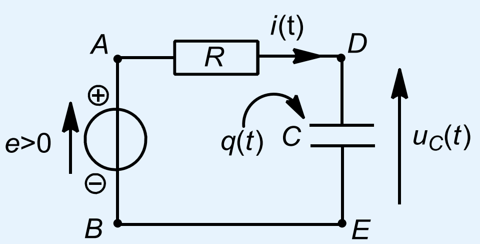
Figure 3 : Evolution de U_c et i au cours du temps

Analyse physique :

À $t = 0$:



Pour $t > 0$



b. Décharge d'un condensateur

Circuit étudié :

avec $R = 10\ \text{k}\Omega$, $C = 2{,}0\ \mu\text{F}$ et $e = 5{,}0\ \text{V}$

Le condensateur est initialement chargé (interrupteur en position (1), régime permanent atteint) et à $t = 0$ on bascule l'interrupteur en position (2).

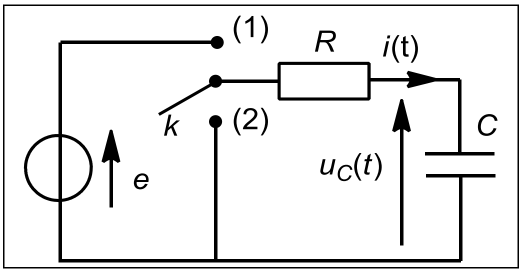


Figure 4 : circuit étudié

Graphes obtenus pour $i(t)$ et $u_C(t)$:

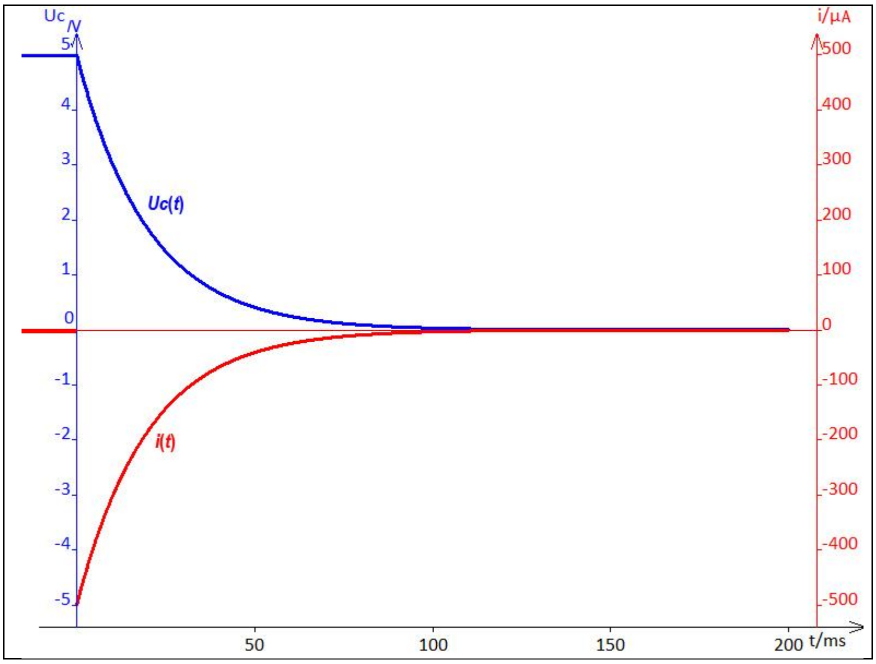
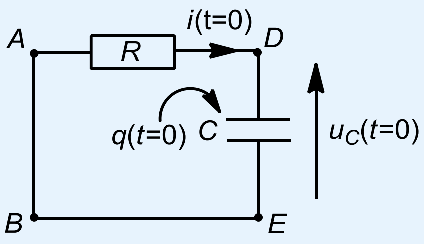


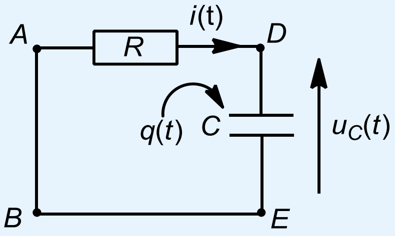
Figure 5 : Evolution de U_c et i au cours du temps

Analyse physique :

À $t = 0$:



Pour $t > 0$



3. Propriétés particulières du condensateur

a. Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

Propriété fondamentale :

Remarque : comme le montre les courbes précédentes il peut y avoir une discontinuité de l'intensité.

Exercice d'application 2

b. Comportement en régime stationnaire

Démonstration :

4. Définitions : régimes transitoire, permanent, stationnaire

Définitions :

Un régime **transitoire** est le régime d'**évolution** d'un système qui n'a pas encore atteint un état **« stable »** appelé **régime permanent**

Dans le cas de la charge et de la décharge d'un condensateur le régime permanent est indépendant du temps : c'est donc un régime **stationnaire**.

Exercice d'application 3

Il existe des régimes permanents dépendant du temps.

Exemple : oscillations mécaniques forcées d'un ressort.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html

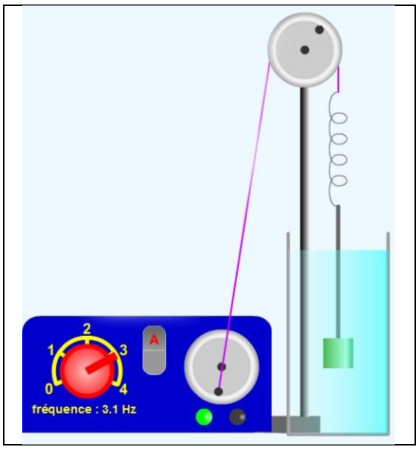


Figure 6 : système d'étude

Voici deux simulations :

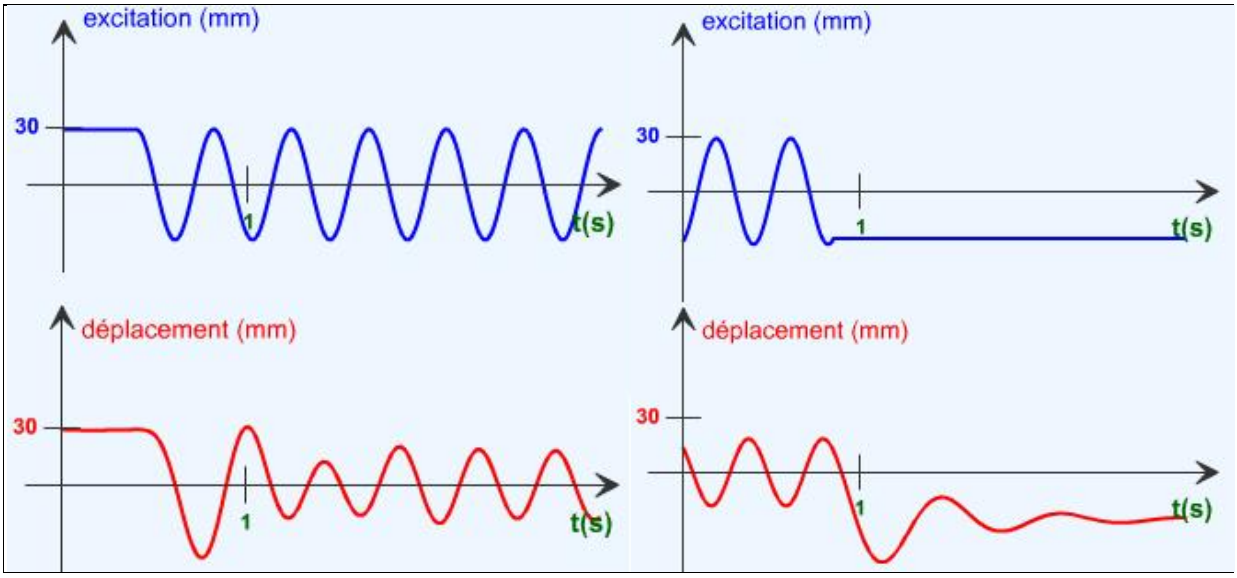


Figure 7 : d'un régime permanent stationnaire vers un régime permanent sinusoïdal

Figure 8 : d'un régime permanent sinusoïdal vers un régime permanent stationnaire

II. Analyse mathématique : équation différentielle linéaire du premier ordre

1. Notion de régime quasi-stationnaire

Les régimes transitoires n'étant pas stationnaires, par définition l'intensité au sein d'une branche de circuit n'est pas constante. Ainsi, la propriété de conservativité du flux, en toute rigueur, n'est plus vérifiée : à un instant t donné l'intensité au sein d'une branche de circuit serait différente d'un endroit à un autre. Ainsi toutes les lois de l'électrocinétique utilisées précédemment (loi d'ohm, loi des nœuds, loi des mailles) ne seraient pas utilisables !!

Nous allons cependant travailler dans l'approximation des régimes dits quasi-stationnaires, en faisant l'approximation que l'évolution temporelle de l'intensité électrique se fait de la même manière en tout point d'une branche (l'information se propage instantanément) : ainsi le flux reste conservatif dans cette approximation.

Cette approximation est légitime car les électrons se propagent à une vitesse proche de celle de la lumière dans le vide, vitesse très grande devant la vitesse d'évolution temporelle des signaux.

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

En régime transitoire, les grandeurs étudiées sont supposées varier lentement au cours du temps et tous les effets liés à la propagation des signaux seront négligés. On se placera ainsi, dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires où l'intensité est conservative, où les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm seront valables.

2. Établissement de l'équation différentielle vérifiée par u_c

a. Cas de la charge

b. Cas de la décharge

3. Méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle linéaire :

Une équation différentielle est dite linéaire quand l'expression de l'équation est affine par rapport aux variables $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y'}$,…, $\boldsymbol{y^{(n)}}$ ($\boldsymbol{y}$ étant une fonction d'une variable $\boldsymbol{x}$) :

$$\boldsymbol{a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_n y^{(n)} = a_{n+1}}$$

où $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_1}$, … , $\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{a_{n+1}}$ sont des fonctions numériques de $\boldsymbol{x}$

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $ay' + by = c$

Notation physique : avec y une fonction du temps

$$a \times \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + b \times y(t) = c$$

Les coefficients a et b seront des constantes par la suite, mais c pourra dépendre du temps (programme de 2ème année en physique).

L'équation est dite **homogène** (ou sans second membre) si $\boldsymbol{c = 0}$

L'équation est dite **non homogène** (ou avec second membre) si $\boldsymbol{c \neq 0}$

Méthode de résolution :

a. Réarranger l'équation

Il faut réarranger l'équation pour faire en sorte qu'il n'y ait pas de coefficient devant la dérivée première. Avec les notations précédentes, cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{a} y(t) = \frac{c}{a}$$

Pour simplifier les notations, on notera : $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha y(t) = \beta$

b. Si l'équation est homogène :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \alpha y(t) = 0$$

L'ensemble des solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :

$$y = \lambda \exp(-\alpha t)$$

Avec λ une constante (due à l'intégration de l'équation), dite constante d'intégration

b.bis. Si l'équation est non homogène :

Les solutions de l'équation différentielle non homogène peuvent s'écrire sous la forme :

$$y(t) = y_{SP}(t) + y_H(t)$$

Avec $y_{SP}(t)$ une solution particulière de l'équation et $y_H(t)$ la solution de l'équation homogène. La solution particulière se détermine en examinant l'expression du second membre (β ici).

Seul un cas sera étudié : le cas d'un second membre constant. Si le **second membre** est **constant**, la **solution particulière** est sous la forme d'une **constante à déterminer**.

La démarche est donc :

- de poser la solution *a priori*
- de calculer la dérivée de cette solution
- de réinjecter ces expressions dans l'équation différentielle non homogène qu'elle doit vérifier, et ainsi de calculer les coefficients inconnus.

c. Dernière étape : déterminer la constante d'intégration $\boldsymbol{\lambda}$

La constante d'intégration ne peut être déterminé que lorsque l'expression des solutions de l'équation différentielle a été écrite (et pas uniquement la solution de l'équation homogène dans le cas d'une équation avec un second membre).

On la détermine à l'aide d'une **condition particulière** sur y.

4. Résolution dans le cadre de la charge et de la décharge du condensateur

a. Charge du condensateur

b. Décharge du condensateur

5. Notion de constante de temps

a. Notion de temps caractéristique

Lors de l'étude de phénomène évoluant au cours du temps il faut pouvoir définir un **temps caractéristique** qui permet ensuite de comparer différentes évolutions.

En chimie vous avez défini le temps de demi-réaction qui permet de caractériser la « vitesse » à laquelle se déroule une réaction. Ce temps de demi-réaction est utilisé aussi lors de l'étude des désintégrations radioactives et il est appelé temps de demi-vie.

b. Temps caractéristique des régimes transitoires du premier ordre : la constante de temps

Il faut définir une grandeur homogène à un temps qui caractérise l'évolution du signal au cours du temps lors des régimes transitoires du premier ordre.

Dans le cas des équations à second membre constant, le paramètre temps apparait dans la solution de l'équation homogène : $y = K\exp(-\alpha t)$.

Définition

Constante de temps des régimes transitoires du premier ordre

Dans le cas du circuit RC :

c. Interprétation de la constante de temps dans le cas d'un circuit RC

En remplaçant t par RC dans l'expression de la tension $u_C(t)$ dans le cas de la charge, on obtient $u_C(\tau) = 0{,}63 \times e$. Si on calcule u_c pour $t = 5\tau$ on trouve $0{,}99 \times e$. On retiendra l'interprétation générale suivante.

Interprétation générale :

d. Détermination graphique

Il existe deux méthodes pour déterminer graphiquement la constante de temps τ d'un système en régime transitoire :

- Déterminer la valeur atteinte par la grandeur en évolution quand le régime est avancé à 63 % : le report sur l'axe des abscisses permet de déterminer τ.
- Méthode de la tangente : on détermine l'intersection entre la tangente à l'origine du régime transitoire et l'asymptote horizontale en $t \to +\infty$, définie par le régime permanent, cette intersection a lieu en $t = \tau$

Appliquons-les sur l'exemple de la charge du condensateur.

Démonstration :

Calculons la dérivée de u_C en $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{RC}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \frac{e}{RC} = \frac{e}{\tau}$$

Équation de la tangente à la courbe en 0 :

$$f(t) = \frac{e}{\tau} \times t$$

En $t = \tau$, $f(t = \tau) = e$

Exercice d'application 4

III. Aspects énergétiques

1. Étude énergétique du condensateur

Puissance reçue par un condensateur et énergie stockée :

En convention récepteur, la puissance instantanée reçue par un condensateur de capacité C (en charge ou en décharge) s'exprime :

L'énergie électrique stockée, $E_{\text{stockée}}$ dans un condensateur à un temps t quelconque est égale à :

Démonstration :

On retrouve cette formule à l'aide de la formule de la puissance reçue $\mathcal{P}_{\text{reç}} = ui$.

La formule de la puissance reçue par un condensateur permet de justifier le fait que la tension aux bornes d'un condensateur doit être une fonction continue du temps (sinon la puissance reçue ne pourrait pas être défini à chaque instant.

2. Bilan énergétique au sein du circuit lors de la charge et lors de la décharge d'un condensateur

a. Bilan énergétique lors de la charge

Énergie reçue par le condensateur pendant la charge (énergie emmagasinée) :

Énergie reçue par le conducteur ohmique pendant la charge (énergie consommée par effet Joule) :

Énergie fournie par le générateur pendant la charge (énergie distribuée aux récepteurs) :

Bilan au sein du circuit :

b. Bilan énergétique lors de la décharge

Énergie reçue par le condensateur :

Énergie reçue par la résistance et transformée en énergie thermique pendant la charge :

Bilan au sein du circuit :

IV. Régimes transitoires en thermodynamique

1. Analogie entre grandeurs

Électrocinétique	Diffusion thermique
Intensité du courant électrique i en A	Flux ou puissance thermique Φ_{th} en W
Charge q en C	Transfert thermique Q en J
Potentiel électrique V en volt	Température T en K
Résistance électrique $R = \dfrac{V_A - V_B}{i_{AB}}$	Résistance thermique $R_{\text{th}} = \dfrac{T_A - T_B}{\Phi_{\text{th},AB}}$
Source idéale de tension	Thermostat (température constante)
Capacité C d'un condensateur en F Traduit la capacité de stockage de charges	Capacité thermique C d'un corps en J.K^{-1} Traduit la capacité de stockage de l'énergie du corps

2. Evolution de la température d'un système {phase condensée incompressible et indilatable} au contact d'un thermostat

Soit un système en phase condensée, de capacité thermique C, initialement à la température T_0, mis en contact à $t = 0$ avec un thermostat de température $T_{\text{thermostat}}$. La température du système va évoluer au cours du temps jusqu'à atteindre la température du thermostat. On notera $T(t)$ la température à un instant t de la transformation.

L'échange thermique se fait soit :

- Par un flux (ou puissance) thermique de conduction reçu par le système dont l'expression est à chaque instant :

- Par un flux (ou puissance) thermique conducto-convectif reçu par le système dont l'expression est à chaque instant (loi de Newton) :

Expression que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\left(T_{\text{thermostat}} - T(t)\right)}{R_{\text{th,CV}}} \text{ avec } R_{\text{th,CV}} = \frac{1}{hS} \text{ la résistance thermique par convection}$$

Avec S la surface séparant le système du thermostat et h le coefficient d'échange en $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$.

Nous étudions ici un cas général, donc nous donnons une expression algébrique de ce flux :

- si $T_{\text{thermostat}} > T(t)$ alors $\Phi_{\text{thermostat}\to\text{système}} > 0$ et le système reçoit bien un flux,
- si $T_{\text{thermostat}} < T(t)$ alors $\Phi_{\text{thermostat}\to\text{système}} < 0$ et le système cède en réalité un flux au thermostat,

En pratique on connait le sens réel des transferts et on utilise les flux non algébrisés, $\Phi_{\text{thermostat}\to\text{système}}$ ou $\Phi_{\text{système}\to\text{thermostat}}$ en prenant le flux orienté dans le sens réel du transfert.

L'écriture du premier principe en termes de flux donne :

La résolution donne :

Graphiquement : exemple avec $T_{\text{thermostat}} > T_0$